



# 平面两自由度机械臂的动力学模型 分析及仿真

## 一、平面两自由度刚性机械臂

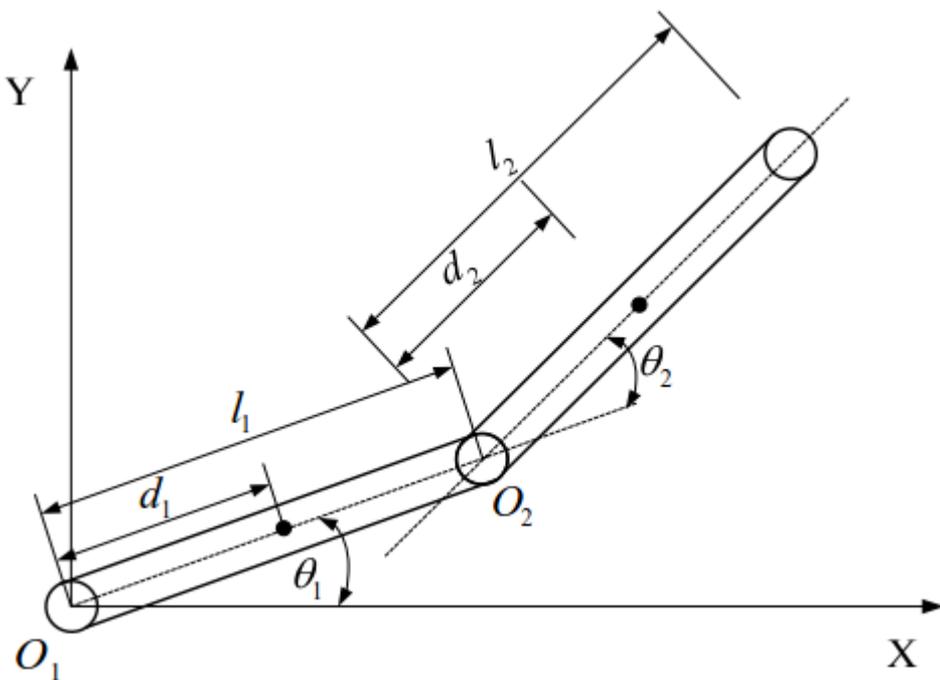
- 平面两自由度刚性机械臂是一种典型的机械结构，其结构简单，包含着丰富的动力学特性，是研究机构运动和控制的代表性机构。
- 下图为一种平面两自由度刚性机械臂，研究该系统的动力学特性，将为改善复杂机构的工作性能及优化机构的结构参数等提供一条新的途径，因此平面两自由度刚性机械臂动力学的研究具有重要的理论意义和应用价值。



一种平面两自由度刚性机械臂

## 1.1 平面两自由度刚性机械臂的动力学模型

- 平面两自由度刚性机械臂系统简化模型如右图。
- 铰接点 $O_1$ 为固定转动副铰接点，机械臂 1 可绕铰接点  $O_1$  转动，铰接点 $O_2$ 为可运动的转动副铰接点，在铰接点处设置驱动力矩电机。
- 机械臂 1 和机械臂 2 的质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ ，长度分别为 $l_1$ 和 $l_2$ ，质心到铰接点的距离分别为 $d_1$ 和 $d_2$ ，对各自质心的转动惯量分别为 $I_1$ 和 $I_2$ 。





## 应用拉格朗日方程法建立系统的动力学模型

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j(t), \quad j=1,2,3,\dots \quad (1)$$

式中， $q_j$ 、 $\dot{q}_j$ 分别为系统的广义坐标和广义速度； $T$ 、 $U$ 分别为系统的动能和势能； $Q_j(t)$ 为广义激振力。

取机械臂 1 的摆角  $\theta_1$  和机械臂 2 相对机械臂 1 的相对摆角  $\theta_2$  为两自由度机械臂系统的广义坐标，则机械臂 1 的动能可以表示为：

$$T_1 = \frac{1}{2}(I_1 + m_1 d_1^2) \dot{\theta}_1^2 \quad (2)$$

机械臂 2 的动能可以表示为：

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (3)$$

系统总动能可以表示为：

$$T = T_1 + T_2 \quad (4)$$

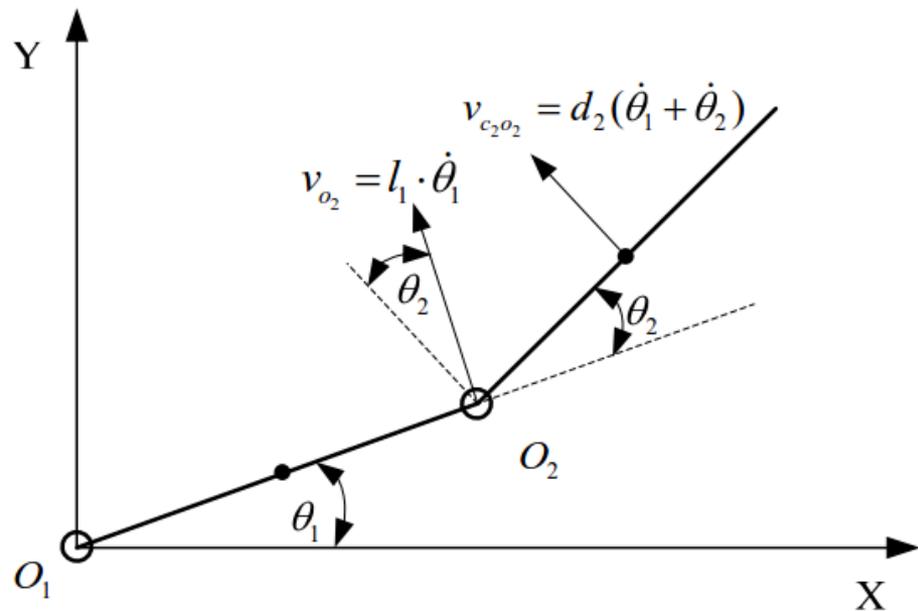


由平面运动刚体上点的速度合成定理，式(4)中机械臂 2 质心的运动速度由其质心绕  $O_2$  的转动和随机械臂 1 的  $O_2$  点的运动合成，即： $\vec{v}_{c_2} = \vec{v}_{o_2} + \vec{v}_{c_2o_2}$ ， $\vec{v}_{o_2}$  和  $\vec{v}_{c_2o_2}$  的大小和方向如图 所示，则，

$$v_{c_2} = \sqrt{(l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + [l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + d_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)]^2} \quad (5)$$

将(5)带入(4)，整理得

$$T = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 d_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 d_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (6)$$



机械臂 2 质心速度图



取  $X$  轴为零势能线，则机械臂 1 势能可以表示为：

$$U_1 = m_1 g d_1 \sin \theta_1 \quad (7)$$

机械臂 2 势能为

$$U_2 = m_2 g [l_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (8)$$

系统的总势能为

$$U = m_1 g d_1 \sin \theta_1 + m_2 g [l_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (9)$$

广义激振力为电机的输出转矩，即  $Q_j(t)$ 。

将上面的系统总动能  $T$ 、总势能  $U$  以及广义激振力  $Q_j(t)$  代入 Lagrange 方程(1)中，可以求得：



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= (I_1 + m_1 d_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 d_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 \\ &\quad - m_2 l_1 d_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 d_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_1 d_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 d_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = (m_1 d_1 + m_2 l_1) g \cos \theta_1 - m_2 d_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$Q_{\theta_1} = \tau_1$$

$$Q_{\theta_2} = \tau_2$$



机械臂 1 的运动微分方程为:

$$\begin{aligned} & \left[ m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 \cos \theta_2) + I_1 + I_2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[ m_2 (d_2^2 + l_1 d_2 \cos \theta_2) + I_2 \right] \ddot{\theta}_2 \\ & - m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - 2m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ & + (m_1 d_1 + m_2 l_1) g \cos \theta_1 + m_2 d_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) = \tau_1 \end{aligned} \quad (10)$$

机械臂 2 的运动微分方程为:

$$\begin{aligned} & \left[ m_2 (d_2^2 + l_1 d_2 \cos \theta_2) + I_2 \right] \ddot{\theta}_1 + (m_2 d_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 \\ & + m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = \tau_2 \end{aligned} \quad (11)$$

因此, 该平面二自由度刚性机械臂系统的运动微分方程可以表示为:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\tau} \quad (12)$$

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$  为系统的惯性矩阵;  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$  为离心力和哥氏力项矩阵;

$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} G_1(\boldsymbol{\theta}) \\ G_2(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$  为重力项;  $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$  为系统的广义坐标;  $\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$  为广义力项。



各分量具体的表格式为：

$$M_{11} = m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 \cos \theta_2) + I_1 + I_2 \quad C_{12} = -m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) - m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)$$

$$M_{12} = m_2 (d_2^2 + l_1 d_2 \cos(\theta_2)) + I_2$$

$$C_{21} = m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2)$$

$$M_{21} = m_2 (d_2^2 + l_1 d_2 \cos(\theta_2)) + I_2$$

$$C_{22} = 0$$

$$M_{22} = m_2 d_2^2 + I_2$$

$$G_1(\theta) = (m_1 d_1 + m_2 l_1) g \cos(\theta_1) + m_2 d_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$C_{11} = -m_2 l_1 d_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)$$

$$G_2(\theta) = m_2 d_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$m_1$  和  $m_2$  分别为机械臂 1 和机械臂 2 的质量； $I_1$  和  $I_2$  分别为机械臂 1 和机械臂 2 对各自质心的转动惯量； $d_1$  和  $d_2$  分别为两铰接点到两机械臂质心的距离； $g$  为重力加速度。



## 1.2 二杆系统的刚性运动学与动力学仿真

为进行动力学分析，必须对机械臂的惯性参数进行计算，如计算不准，动力学分析就失去了实用意义。所谓惯性参数，即指刚体的质量、质心位置和惯性张量。

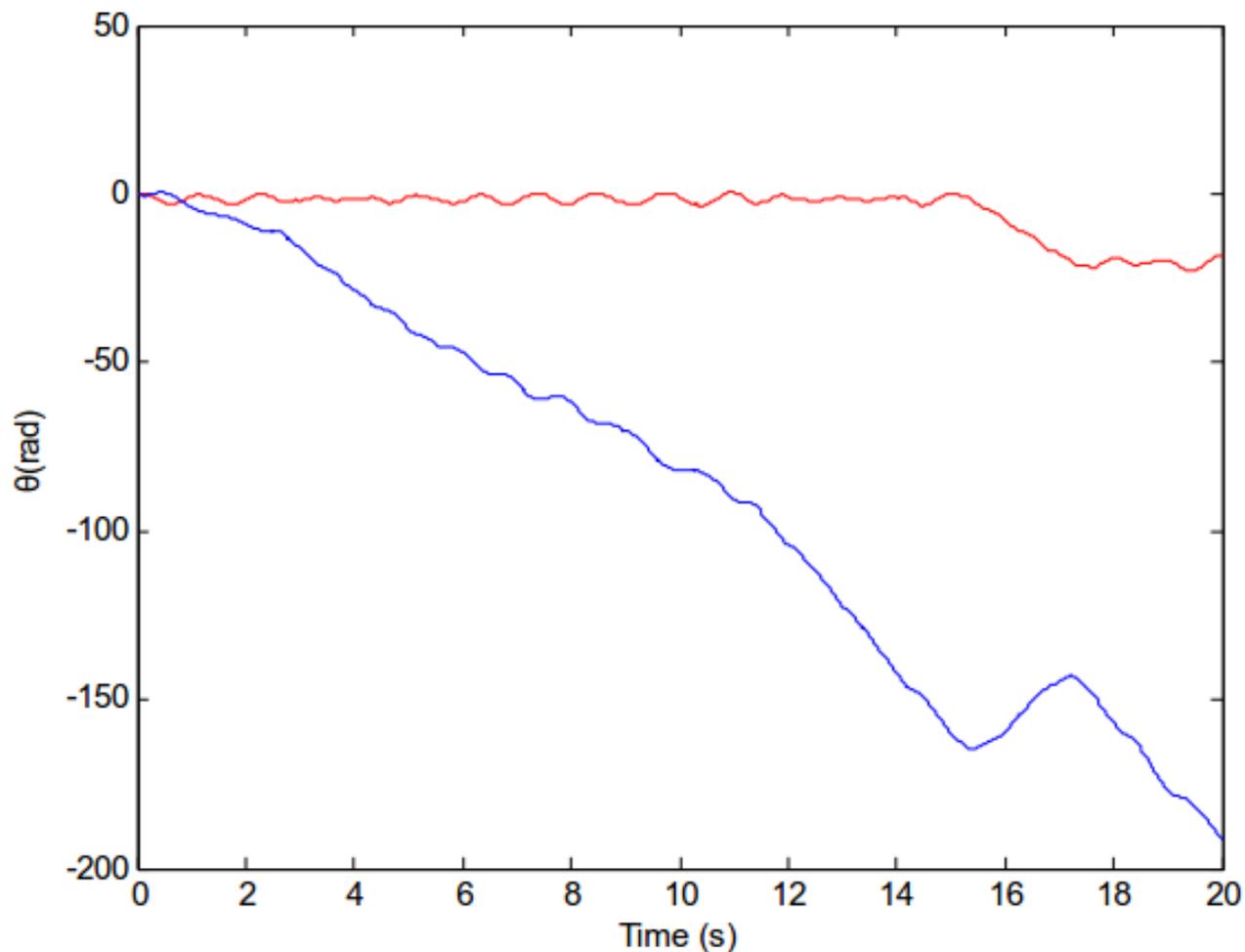
惯性张量  $I_{ij}$  的标称近似值，质心位置  $L_{ci}$  以及质量  $m_i$  等参数参见表

两自由度刚性机械臂惯性张量及相关参数标称值表

连杆 $i$	$I_{zz}$ ( $\text{kgm}^2$ )	$m_i$ (kg)	$L_{ci}$ (m)	$L_i$ (m)
1	0.04	2	0.075	0.15
2	0.04	2	0.075	0.15



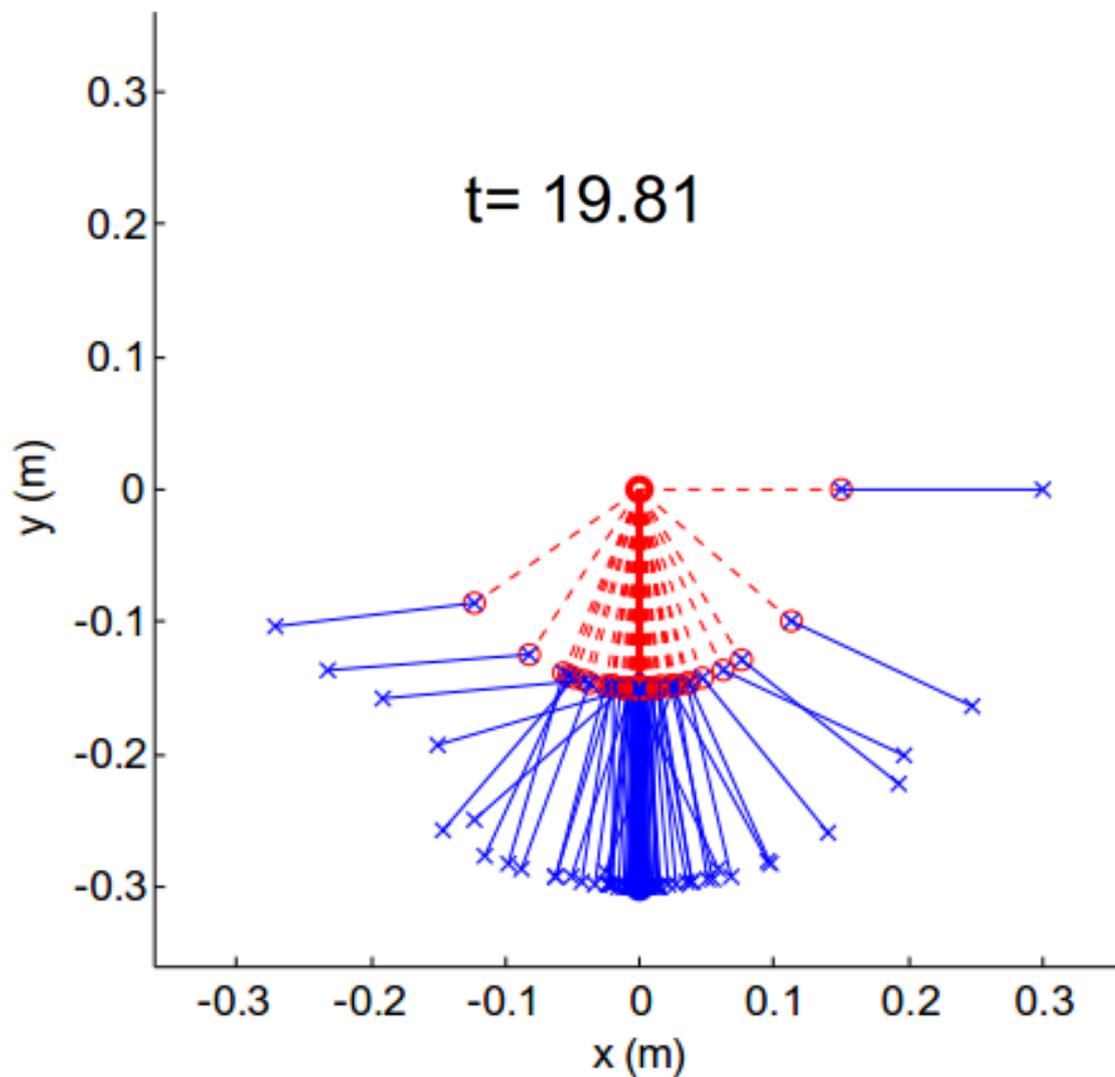
设机械臂各个杆件在  $t=0$  的初始状态为  $q_0 = [0 \ 0]$ ,  $\dot{q}_0 = [0 \ 0]$ , 重力加速度  $9.8\text{m/s}^2$ 。



机械臂关节角随时间变化的曲线



两自由度刚性机械臂的位置关系图如图



两自由度刚性机械臂位置变化

## 二、刚柔耦合系统动力学

- 机械臂通常可以视为由刚性部件和柔性部件组成，柔性机械臂在随系统做大范围运动的同时，将产生自身的小变形弹性振动，这两种运动相互耦合、相互影响。对于多杆柔性机械臂，除了存在单个机械臂自身的大范围运动和柔性变形相互耦合的特性，各个机械臂运动之间也存在耦合效应，因此动力学模型的建立及其特性都更加复杂。
- 由一个刚性机械臂和一个柔性机械臂组成的机械臂系统是一种典型的刚-柔耦合系统，如图 所示，为加拿大臂的示意图，是典型的刚-柔耦合机构。
- 本节基于 Lagrange 方程，采用假设模态法建立了刚-柔耦合机械臂的动力学方程，分析柔性机械臂模态截断阶数对其对力学模型精度的影响。

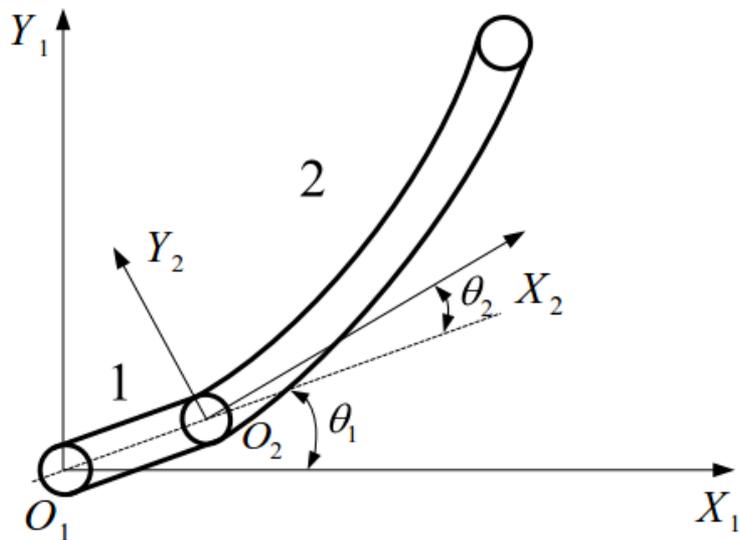


刚-柔耦合系统实物图

## 2.1 刚柔耦合系统动力学模型

刚性机械臂 1 围绕其中心  $O_1$  在水平面内做旋转运动，如图 所示，转矩为  $\tau_1$ ，转角为  $\theta_1$ 。柔性机械臂 2 围绕关节  $O_2$  做水平旋转运动，转矩为  $\tau_2$ ，转角为  $\theta_2$ 。记刚性机械臂的弹性模量为  $E_1$ ，质量为  $m_1$ ，长度为  $L_1$ ，密度为  $\rho_1$ ，横截面对中性轴的惯性矩为  $I_1$ 。柔性机械臂的弹性模量为  $E_2$ ，横截面对中性轴的惯性矩为  $I_2$ ，密度为  $\rho_2$ ，长度为  $L_2$ ，横截面为矩形，其高度为  $h_2$ ，宽度为  $b_2$ 。忽略重力和空气阻力等因素影响。

按照混合坐标法对两杆刚-柔机械臂系统建立浮动坐标系。对刚性机械臂运动建立惯性坐标系  $X_1O_1Y_1$ ，对柔性机械臂建立浮动坐标系  $X_2O_2Y_2$ 。则柔性体上任意一点  $p$  的运动可以分解为浮动坐标系  $X_2O_2Y_2$  牵连的大范围运动和相对于浮动坐标系的柔性变形运动的叠加。





采用拉格朗日方程法建立带有末端质量的刚体-柔性机械臂系统的动力学模型，Lagrange 方程可表示为：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j(t), \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (14)$$

其中， $q_j$ 、 $\dot{q}_j$  分别为系统的广义坐标和广义速度； $T$ 、 $U$  分别为系统的动能和势能； $Q_j(t)$  为广义激振力。

设  $L_1$  为刚体的长度， $\theta$  中心刚体的转角，柔性机械臂上任意一点  $p$  关于惯性坐标系  $X_1O_1Y_1$  的坐标矢量  $\mathbf{r}_p$  可表达为：

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_{Oo} + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_{op_0} + \mathbf{r}_{p_0p}) \quad (15)$$

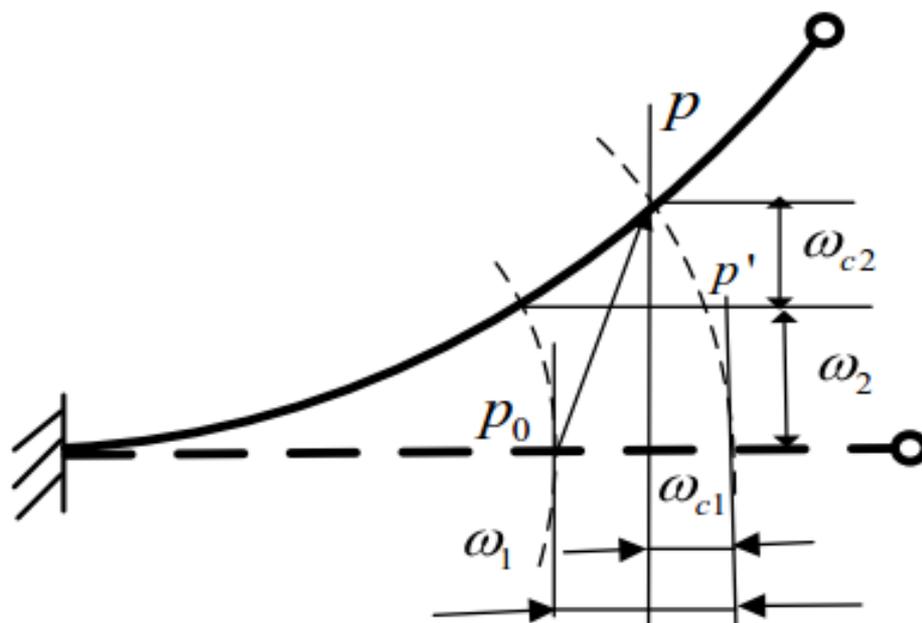
式中， $\mathbf{r}_{Oo}$  为浮动坐标系相对于惯性坐标系  $X_1O_1Y_1$  原点位置矢量，其坐标矩阵为  $[L_1 \cos \theta \quad L_1 \sin \theta]^T$ ； $\mathbf{r}_{op_0}$  为未变形时  $p$  点在浮动坐标系  $xoy$  的位置矢量，其坐标矩阵为  $[x \quad 0]^T$ ； $\mathbf{r}_{p_0p}$  为柔性变形矢量，其坐标为  $(u_x, u_y)$ ； $\boldsymbol{\psi}$  为浮动坐标系相对于固定坐标系的变换矩阵，其值为：

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$



机械臂上任意一点  $p$  的形变如图 所示。其中， $p_0$  为柔性机械臂  $p$  点未变形时的位置。 $\omega_1(x,t)$  为纵向伸长量， $\omega_2(x,t)$  为横向伸长量。 $\omega_{c1}(x,t)$  是由弯曲变形量  $\omega_2(x,t)$  引起的纵向缩短量， $\omega_{c2}(x,t)$  是由纵向变形  $\omega_1(x,t)$  引起的横向伸长量，其值为：

$$\omega_{c1}(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$$
$$\omega_{c2}(x,t) = \int_0^x \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} d\xi$$
(17)





式中， $\xi$ 为坐标系  $X_2O_2Y_2$  的积分变量。则柔性机械臂的形变  $\mathbf{r}_{p_o p}$  的矩阵形式可表示为：

$$\mathbf{r}_{p_o p} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1(x,t) - \omega_{c1}(x,t) \\ \omega_2(x,t) + \omega_{c2}(x,t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

对于细长机械臂，由于横向变形量  $\omega_2$  远远大于纵向伸缩量  $\omega_1$ ，因而可以近似认为  $u_y = \omega_2$ ，即  $\omega_{c2}(x,t) = 0$ 。则  $\mathbf{r}_{p_o p}$  的表达式可以简化为：

$$\mathbf{r}_{p_o p} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1(x,t) - \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ \omega_2(x,t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

由(15)、(16)、(19)可得到柔性机械臂上任意一点  $p$  的位置坐标为：

$$\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 \\ L_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + \mathbf{w}_1 \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2^2 \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ \mathbf{w}_2 \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中  $\omega_1(x,t) = \mathbf{w}_1(x) \mathbf{q}_1(t)$ ， $\omega_2(x,t) = \mathbf{w}_2(x) \mathbf{q}_2(t)$ ， $\mathbf{w}_1(x)$  和  $\mathbf{w}_2(x)$  为  $1 \times N$  维柔性机械臂纵向和横向振动模态振型， $\mathbf{q}_1(t)$  和  $\mathbf{q}_2(t)$  为  $N \times 1$  维柔性机械臂纵向和横向振动模态坐标。



对(20)中  $r_p$  求一阶导得到:

$$\dot{r}_p = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 (x + w_1 q_1 + w_{cl} q_2^2) \\ + \cos \theta_2 (w_1 \dot{q}_1 + \sum_{i=1}^n 2w_{cli} q_{2i} \dot{q}_{2i}) - \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 w_2 q_2 - \sin \theta_2 w_2 \dot{q}_2 \\ L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 (x + w_1 q_1 + w_{cl} q_2^2) \\ + \sin \theta_2 (w_1 \dot{q}_1 + \sum_{i=1}^n 2w_{cli} q_{2i} \dot{q}_{2i}) - \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 w_2 q_2 + \cos \theta_2 w_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

取刚体的转动惯量为  $I_1$ ，则刚体的动能为:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{L_1}{2} \dot{\theta}_1 \right)^2 \quad (22)$$

柔性机械臂的动能为:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} m_2 \dot{r}_p^T \dot{r}_p dx \quad (23)$$

其中，  $m_2 = \rho A$ 。

机械臂末端质量的动能为

$$T_3 = \frac{m_L \dot{r}_{PL}^T \dot{r}_{PL}}{2} \quad (24)$$

其中，  $r_L$  为末端质量的坐标矢量。



刚体-柔性机械臂系统的总动能为:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{L_1}{2} \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_p^T \dot{\mathbf{r}}_p dx + \frac{m_L \dot{\mathbf{r}}_{PL}^T \dot{\mathbf{r}}_{PL}}{2} \quad (25)$$

做平面旋转运动的柔性机械臂横向和纵向弹性变形产生的弹性势能为:

$$U = \frac{1}{2} E_2 A_2 \int_0^L \left( \frac{\partial \omega_1(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} E_2 I_2 \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \omega_2(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (26)$$

刚体的运动微分方程为:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \tau \quad (27)$$

柔性机械臂的运动微分方程为:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (28)$$



刚体-柔性机械臂系统的总动能为:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{L_1}{2} \dot{\theta}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_P^T \dot{\mathbf{r}}_P dx + \frac{m_L \dot{\mathbf{r}}_{PL}^T \dot{\mathbf{r}}_{PL}}{2} \quad (25)$$

做平面旋转运动的柔性机械臂横向和纵向弹性变形产生的弹性势能为:

$$U = \frac{1}{2} E_2 A_2 \int_0^L \left( \frac{\partial \omega_1(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} E_2 I_2 \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \omega_2(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (26)$$

刚体的运动微分方程为:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \tau \quad (27)$$

柔性机械臂的运动微分方程为:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (28)$$

将系统的总动能  $T$ ，总势能  $U$  带入(4.14)和(4.15)，得到两杆刚-柔耦合机械臂的非线性动力学方程如下:



$$\begin{bmatrix} m_{\theta_1} & m_{\theta_1\theta_2} & m_{\theta_1q_1} & m_{\theta_1q_2} \\ m_{\theta_2\theta_1} & m_{\theta_2} & m_{\theta_2q_1} & m_{\theta_2q_2} \\ m_{q_1\theta_1} & m_{q_1\theta_2} & m_{q_1} & m_{q_2q_1} \\ m_{q_2\theta_1} & m_{q_2\theta_2} & m_{q_2q_1} & m_{q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + 2\dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{q_2q_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{q_1q_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_{q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

其中  $m_{\theta_1\theta_2}$  和  $m_{\theta_2\theta_1}$  分别为刚性和柔性机械臂系统的转动惯量,  $m_{\theta_1q_2}$ ,  $m_{\theta_2q_1}$  是  $N \times N$  维广义质量矩阵,  $m_{\theta_iq_j} = m_{q_j\theta_i} \in R^{1 \times N}$  ( $i=1,2; j=1,2$ ) 表示机械臂大范围旋转运动与柔性变形之间的非线性耦合。  $\mathbf{G}_{q_1q_2}$  和  $\mathbf{G}_{q_2q_1}$  反映了陀螺效应, 均为  $N \times N$  维矩阵。  $\mathbf{k}_{q_1}$ ,  $\mathbf{k}_{q_2}$  为  $N \times N$  维刚度矩阵。  $\tau_1 - \tau_2$ ,  $\tau_2$  是相对于  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的广义力。  $h_i, i=(1,2,3,4)$  为机械臂动力学方程非线性项。



各参数的详细表达式如下：

$$m_{\theta_1} = m_L L_1^2 + 1/3 m_1 L_1^2 + m_2 L_1^2 L_2$$

$$m_{\theta_1 q_1} = m_{q_1 \theta_1} = m_L \mathbf{w}_{1L} L_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 L_1 \mathbf{i}_{w1} \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$m_{\theta_2} = m_L \mathbf{w}_{2L}^2 \mathbf{q}_2^2 + m_L \mathbf{w}_{1L}^2 \mathbf{q}_1^2 - 2m_L L_2 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2^2 + 2m_L L_2 \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_1 - 2m_L \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_1 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2^2 + m_L \mathbf{w}_{c1L}^2 \mathbf{q}_2^4$$

$$+ m_L L_2^2 - 2m_2 \mathbf{i}_{wclx} \mathbf{q}_2^2 + 2m_2 \mathbf{i}_{w1x} \mathbf{q}_1 - 2m_2 \mathbf{i}_{w1wcl} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2^2 + 1/3 m_2 L_2^3 + m_2 \mathbf{i}_{w22} \mathbf{q}_2^2$$

$$+ m_2 \mathbf{i}_{w12} \mathbf{q}_1^2 + m_2 \mathbf{i}_{wcl2} \mathbf{q}_2^4$$

$$m_{\theta_2 \theta_2} = m_{\theta_2 \theta_2} = m_L L_1 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_L L_1 \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_L L_1 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$- m_L L_1 \mathbf{w}_{2L} \mathbf{q}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 L_1 \mathbf{i}_{w2} \mathbf{q}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 1/2 m_2 L_1 L_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$- m_2 L_1 \mathbf{i}_{wcl} \mathbf{q}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 L_1 \mathbf{i}_{w1} \mathbf{q}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$m_{\theta_2 q_2} = m_{q_2 \theta_2} = -2m_L L_1 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_L L_1 \mathbf{w}_{2L} \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$- 2m_2 L_1 \mathbf{i}_{wcl} \mathbf{q}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 L_1 \mathbf{i}_{w2} \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$m_{\theta_2 q_1} = m_{q_1 \theta_2} = -m_L \mathbf{w}_{1L} \mathbf{w}_{2L} \mathbf{q}_2 - m_2 \mathbf{i}_{w1w2} \mathbf{q}_2$$

$$m_{\theta_2 q_2} = m_{\theta_2 q_2} = m_L \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2^2 \mathbf{w}_{2L} + m_L \mathbf{w}_{2L} L_2 + m_L \mathbf{w}_{2L} \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{i}_{w2x} + m_2 \mathbf{i}_{w1w2} \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{i}_{w2wcl} \mathbf{q}_2^2$$

$$m_{q_1} = 1/2 m_L (2 \sin(\theta_2)^2 \mathbf{w}_{1L}^2 + 2 \cos(\theta_2)^2 \mathbf{w}_{1L}^2) + 1/2 m_2 (2 \cos(\theta_2)^2 \mathbf{i}_{w12} + 2 \sin(\theta_2)^2 \mathbf{i}_{w12})$$

$$m_{q_2 q_1} = m_{q_2 q_1} = -2m_L \mathbf{w}_{1L} \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2 - 2m_2 \mathbf{i}_{w1wcl} \mathbf{q}_2$$



$$m_{q_2} = 4m_L \mathbf{w}_{c1L}^2 \mathbf{q}_2^2 + m_L \mathbf{w}_{2L}^2 + m_2 \mathbf{i}_{w22} + 4m_2 \mathbf{i}_{wc12} \mathbf{q}_2^2$$

$$\mathbf{G}_{q_1 q_2} = -m_L \mathbf{w}_{1L} \mathbf{w}_{2L} - m_2 \mathbf{i}_{w1w2}$$

$$\mathbf{G}_{q_2 q_1} = m_L \mathbf{w}_{1L} \mathbf{w}_{2L} + m_2 \mathbf{i}_{w1w2}$$

$$\mathbf{k}_{q_1} = E_2 A_2 \mathbf{i}_{dw12} - m_2 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{w12} - m_L \dot{\theta}_2^2 \mathbf{w}_{1L}^2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{q_2} = & E_2 I_2 \mathbf{i}_{ddw22} - m_L \dot{\theta}_2^2 \mathbf{w}_{2L}^2 - m_2 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{w22} + 2m_L \dot{\theta}_2^2 \mathbf{w}_{1L} \mathbf{w}_{c1L} + 2m_L \dot{\theta}_2^2 L_2 \mathbf{w}_{c1L} + 2m_2 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{w1wc1} \\ & + 2m_L L_1 \dot{\theta}_1^2 \mathbf{w}_{c1L} \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2m_2 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{wclx} + 2m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \mathbf{i}_{wcl} \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

非线性项为:

$$\begin{aligned} h_1 = & 2L_1 (m_L \mathbf{w}_{c1L} \dot{\mathbf{q}}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_L \dot{\theta}_2 \mathbf{w}_{1L} \dot{\mathbf{q}}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_L \dot{\theta}_2 \mathbf{w}_{2L} \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \\ & 2m_L \dot{\theta}_2 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2 \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \dot{\theta}_2 \mathbf{i}_{w1} \dot{\mathbf{q}}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \dot{\theta}_2 \mathbf{i}_{w2} \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \\ & 2m_2 \dot{\theta}_2 \mathbf{i}_{wcl} \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \mathbf{i}_{wcl} \dot{\mathbf{q}}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) (-m_L L_1 \mathbf{w}_{2L} \mathbf{q}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \\ & m_L L_1 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_1 \mathbf{i}_{w2} \mathbf{q}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 1/2 m_2 L_1 L_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ & m_2 L_1 \mathbf{i}_{w1} \mathbf{q}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_L L_1 \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_L L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \\ & m_2 L_1 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{wcl} \mathbf{q}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 h_2 = & 2(m_2 \mathbf{i}_{w_2 w_1} + m_L \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{w}_{2L}) \mathbf{q}_2 \dot{\theta}_2^2 + (m_L L_1 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_L L_1 \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
 & + m_L L_1 \mathbf{w}_{2L} \mathbf{q}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_L L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_1 \mathbf{i}_{w_1} \mathbf{q}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
 & + m_2 L_1 \mathbf{i}_{w_1} \mathbf{q}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 L_1 \mathbf{i}_{w_2} \mathbf{q}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1/2 m_2 L_1 L_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \dot{\theta}_1^2 \\
 & + (2m_2 \mathbf{i}_{w_1 x} \dot{\mathbf{q}}_1 + 2m_2 \mathbf{i}_{w_2 2} \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 - 4m_L L_2 \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 - 4m_L \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + 2m_2 \mathbf{i}_{w_1 2} \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \\
 & + 2m_L L_2 \mathbf{w}_{1L} \dot{\mathbf{q}}_1 + 2m_L \mathbf{w}_{1L}^2 \dot{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q}_1 + 4m_2 \mathbf{i}_{w_1 2} \mathbf{q}_2^3 \dot{\mathbf{q}}_2 - 4m_2 \mathbf{i}_{w_1 x} \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + 4m_L \mathbf{w}_{c1L}^2 \mathbf{q}_2^3 \dot{\mathbf{q}}_2 \\
 & + 2m_L \mathbf{w}_{2L}^2 \dot{\mathbf{q}}_2 \mathbf{q}_2 - 4m_2 \mathbf{i}_{w_1 w_1} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 - 2m_2 \mathbf{i}_{w_1 w_1} \dot{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q}_2^2 - 2m_L \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{w}_{1L} \mathbf{q}_2^2 \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\theta}_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_3 = & (-L_1 m_L \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_L \mathbf{w}_{c1L} \mathbf{q}_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_L \mathbf{w}_{2L} \dot{\theta}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 - m_L L_2 \dot{\theta}_2^2) \mathbf{w}_{1L} + m_2 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{w_1 w_1} \mathbf{q}_2^2 \\
 & - m_2 L_1 \mathbf{i}_{w_1} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{w_1 x} - 2m_2 \dot{\theta}_2 \mathbf{i}_{w_1 w_2} \dot{\mathbf{q}}_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_4 = & -m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \mathbf{i}_{w_2} \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_L L_1 \dot{\theta}_1^2 \mathbf{w}_{2L} \sin(\theta_1 - \theta_2) + (4m_L \mathbf{w}_{c1L}^2 \mathbf{q}_2 + 4m_2 \mathbf{i}_{w_1 2} \mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2^2 \\
 & - 2m_L \dot{\theta}_2^2 \mathbf{w}_{c1L}^2 \mathbf{q}_2^3 - 2m_2 \dot{\theta}_2^2 \mathbf{i}_{w_1 2} \mathbf{q}_2^3
 \end{aligned}$$

可以将刚体-柔性机械臂的动力学方程(4.16)简化成:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + 2\dot{\theta}\mathbf{G}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{H} = \boldsymbol{\tau} \tag{30}$$

其中  $\mathbf{X}=[\theta_1, \theta_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$ , 为柔性机械臂系统广义坐标。



## 2.2 刚柔耦合系统动力学仿真

柔性机械臂的动力学模型是连续无限维的，包括刚性大范围运动的转角以及无数个模态坐标。对于柔性机械臂振动的离散化动力学模型，模态截断阶数越多，其数值求解结果就越逼近实际情况，然而随着模态阶数的增加，求解的计算量就将越大，所以应该合理的选择动力学模型的模态截断阶数。由于柔性机械臂的轴向变形很小，为了减小动力学的求解的规模，在此只讨论机械臂横向振动模态截断对其动力学特性的影响。

对于式(30)所示的刚体-柔性机械臂动力学方程，分别取其的前一阶、前二阶和前三阶模态进行动力学仿真。选取柔性机械臂的驱动力矩为：

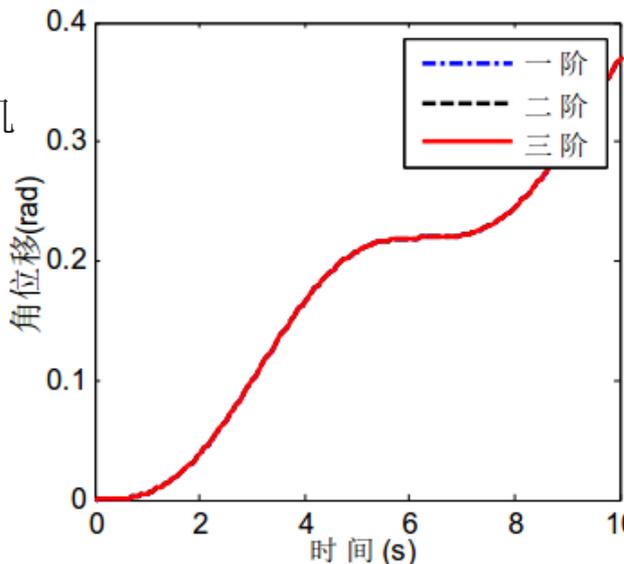
$$\tau = 0.005 \sin(t) \tag{31}$$

设作用时间为 10 秒，刚体和柔性机械臂的结构参数详见表 3 中所示。柔性机械臂初始角位移为 0rad，初始角速度为 0rad/s，末端纵向和横向初始变形为 0m。

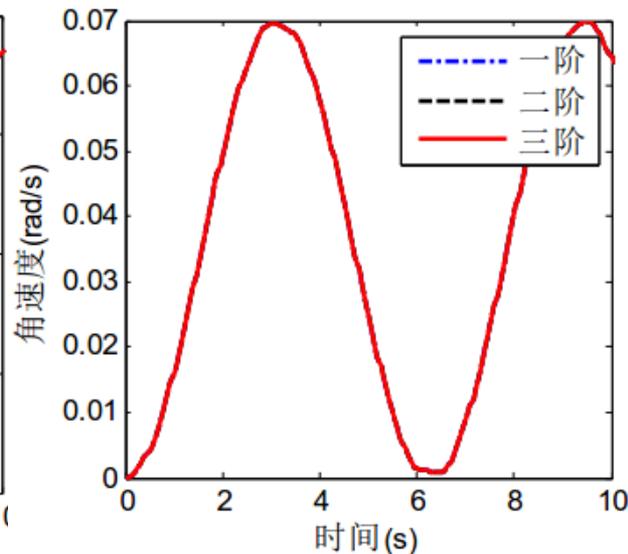
系统参数

符号	符号说明	数值	单位
$m_1$	刚性机械臂的质量	0.0159	kg
$m_2$	柔性机械臂的质量	0.0793	kg
$m_L$	末端集中质量	0.02	kg
$L_1$	刚性机械臂的长度	0.1	m
$L_2$	柔性机械臂的长度	0.5	m
$\rho_1$	刚性机械臂的密度	$7.93 \times 10^3$	kg / m <sup>3</sup>
$\rho_2$	柔性机械臂的密度	$2.73 \times 10^3$	kg / m <sup>3</sup>
$E_1$	刚性机械臂的弹性模量	$0.7 \times 10^{11}$	pa
$E_2$	柔性机械臂的弹性模量	$2 \times 10^{11}$	pa

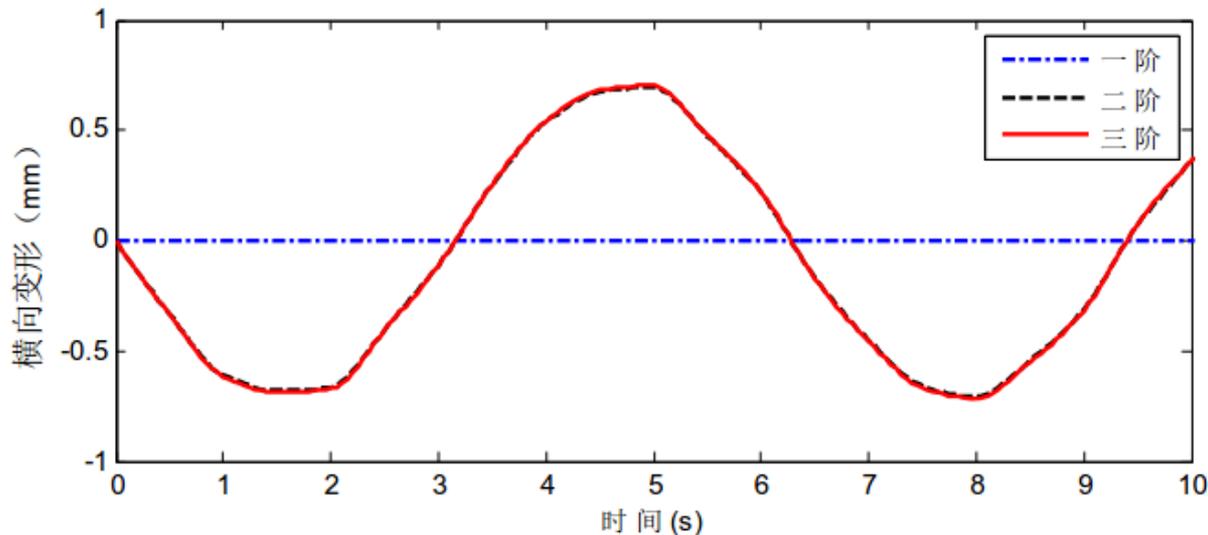
- 右上两图表示在一阶、二阶和三阶模态截断条件下，刚-柔耦合机械臂动力学方程求解出角位移和角速度的时间历程曲线，从图中可以看出三条曲线相重合，说明柔性机械臂的大范围运动受模态截断阶数影响较小。
- 右下图表示柔性机械臂在一阶、二阶和三阶模态截断条件下，末端横向变形的时间历程曲线，从图中可以看出，二阶模态截断和三阶模态截断计算的末端横向变形非常接近，而一阶模态截断和二阶、三阶模态截断误差较大。
- 通过对比分析，一阶模态截断会影响柔性机械臂动力学模型的计算精度，二阶模态截断和三阶模态截断仿真结果的误差很小。二阶模态截断的柔性机械臂动力学模型，相对于一阶模态截断能满足求解精度要求，相对三阶模态截断又具有求解规模较小的优点，因此对于柔性机械臂动力学模型采用二阶模态截断较为合理。



柔性机械臂角位移变化



柔性机械臂角速度变化



柔性机械臂末端横向变形

# 动力吸振器

## 1. 无阻尼动力吸

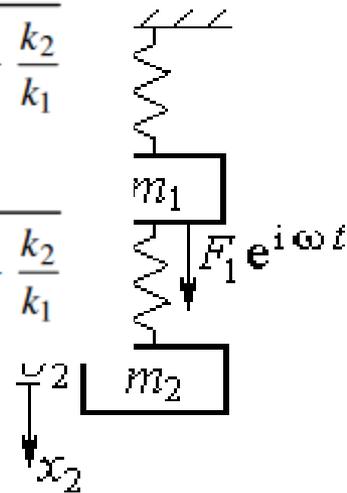
$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

稳态响应

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(k_{22} - m_2 \omega^2) F_1}{(k_{11} - m_1 \omega^2)(k_{22} - m_2 \omega^2) - k_{12}^2} \\ &= \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_1}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\ &= \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_1}{m_1 m_2 \omega^4 - [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)] \omega^2 + k_1 k_2} \end{aligned}$$



无阻尼动力吸振器

# 动力吸振器

## 1. 无阻尼动力吸

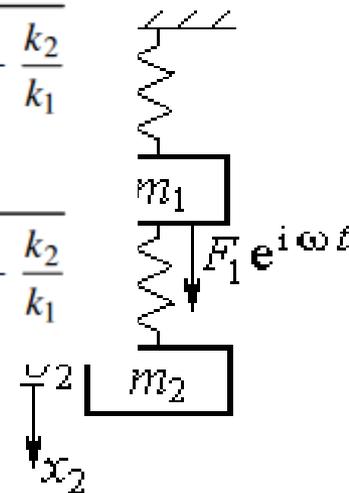
$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

稳态响应

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(k_{22} - m_2 \omega^2) F_1}{(k_{11} - m_1 \omega^2)(k_{22} - m_2 \omega^2) - k_{12}^2} \\ &= \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_1}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\ &= \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_1}{m_1 m_2 \omega^4 - [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)] \omega^2 + k_1 k_2} \end{aligned}$$



无阻尼动力吸振器

# 动力吸振器

运动方程

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

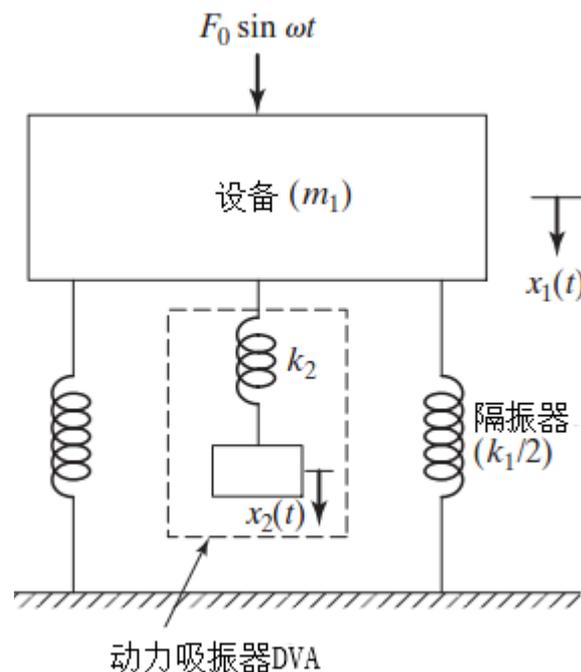
简谐激励假设

$$x_j(t) = X_j \sin \omega t, \quad j = 1, 2$$

稳态运动幅值

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$





## 动力吸振器

让 $m_1$ 的幅值为零，可以令

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

如果机器在添加吸振器之前在其共振频率附近运行  $\omega^2 \simeq \omega_1^2 = k_1/m_1$

把动力吸参数设计如下，可实现主结构的零位移

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1}$$



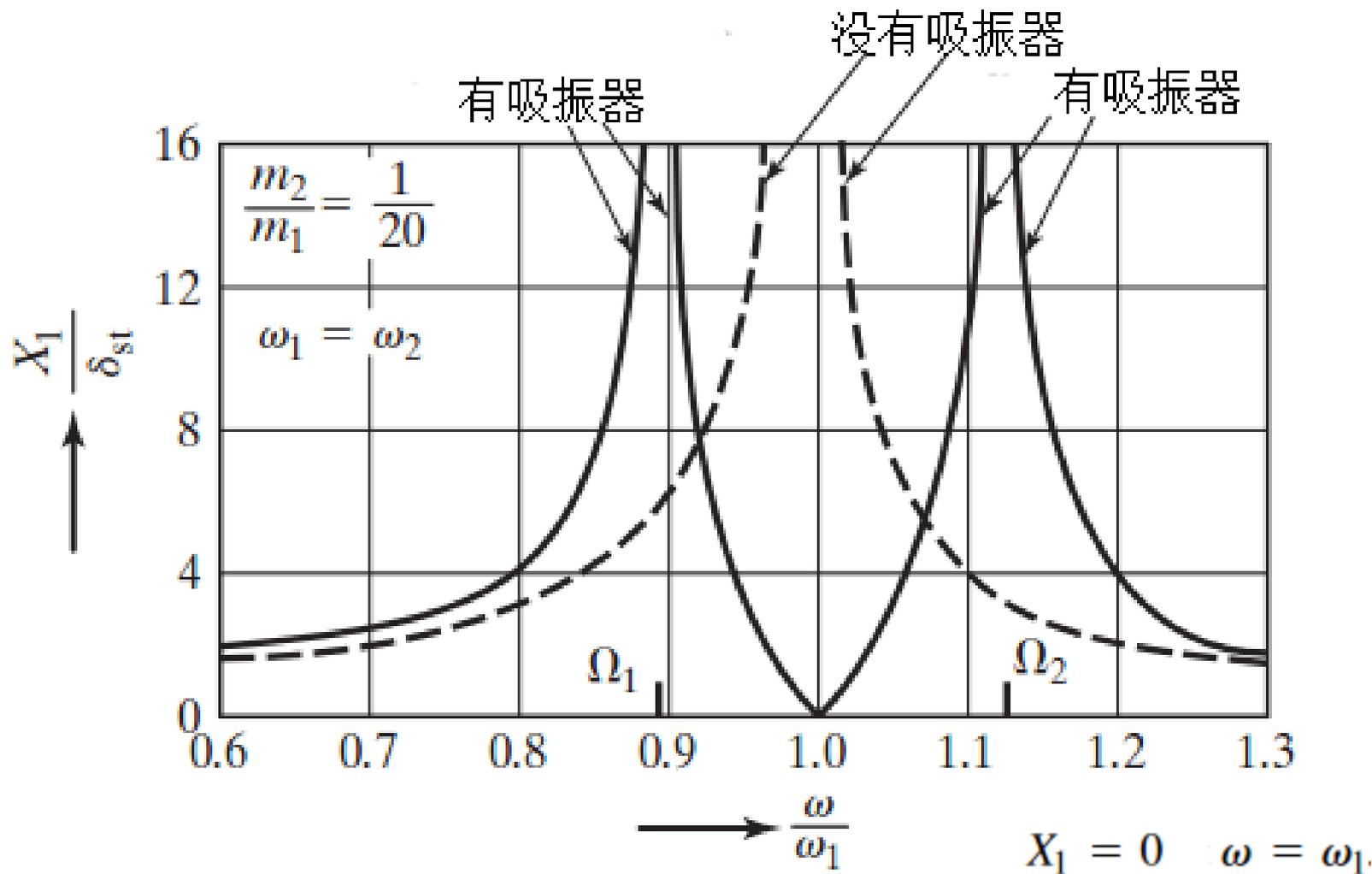
定义如下的参数

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1}, \quad \omega_1 = \left(\frac{k_1}{m_1}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2}$$

则有

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$



机器振动幅度的变化，两个峰值对应于两个固有频率。



$X_1 = 0$   $\omega = \omega_1$  此时

$$X_2 = -\frac{k_1}{k_2} \delta_{st} = -\frac{F_0}{k_2}$$

这表明添加的弹簧施加的力与外加力相反并中和它， $X_1$ 从而减少到零。这也便给出了动力吸振器的设计准则

$$k_2 X_2 = m_2 \omega^2 X_2 = -F_0$$

由 $X_2$ 的允许取值来确定 $k_2$ 和 $m_2$ 。

从前面的图可以看出动力吸振器在消除激励力 $\omega$ 的同时，引入两个共振频率 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ ，这两个频率点机器的幅值也是无穷的。因此一定要使得 $\omega$ 与 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 远离。



从前面的图可以看出动力吸振器在消除激励力 $\omega$ 的同时，引入两个共振频率 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ ，这两个频率点机器的幅值也是无穷的。因此一定要使得 $\omega$ 与 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 远离。

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_2}{m_2} \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2$$

$$\left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^4 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \left[ 1 + \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right] + 1 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} \left( \frac{\Omega_1}{\omega_2} \right)^2 \\ \left( \frac{\Omega_2}{\omega_2} \right)^2 \end{matrix} \right\} = \frac{\left\{ \left[ 1 + \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right] \mp \left\{ \left[ 1 + \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right]^2 - 4 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right\}^{1/2} \right\}}{2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2}$$

共振频率1、2的解，表现为质量比和频率比的函数关系。



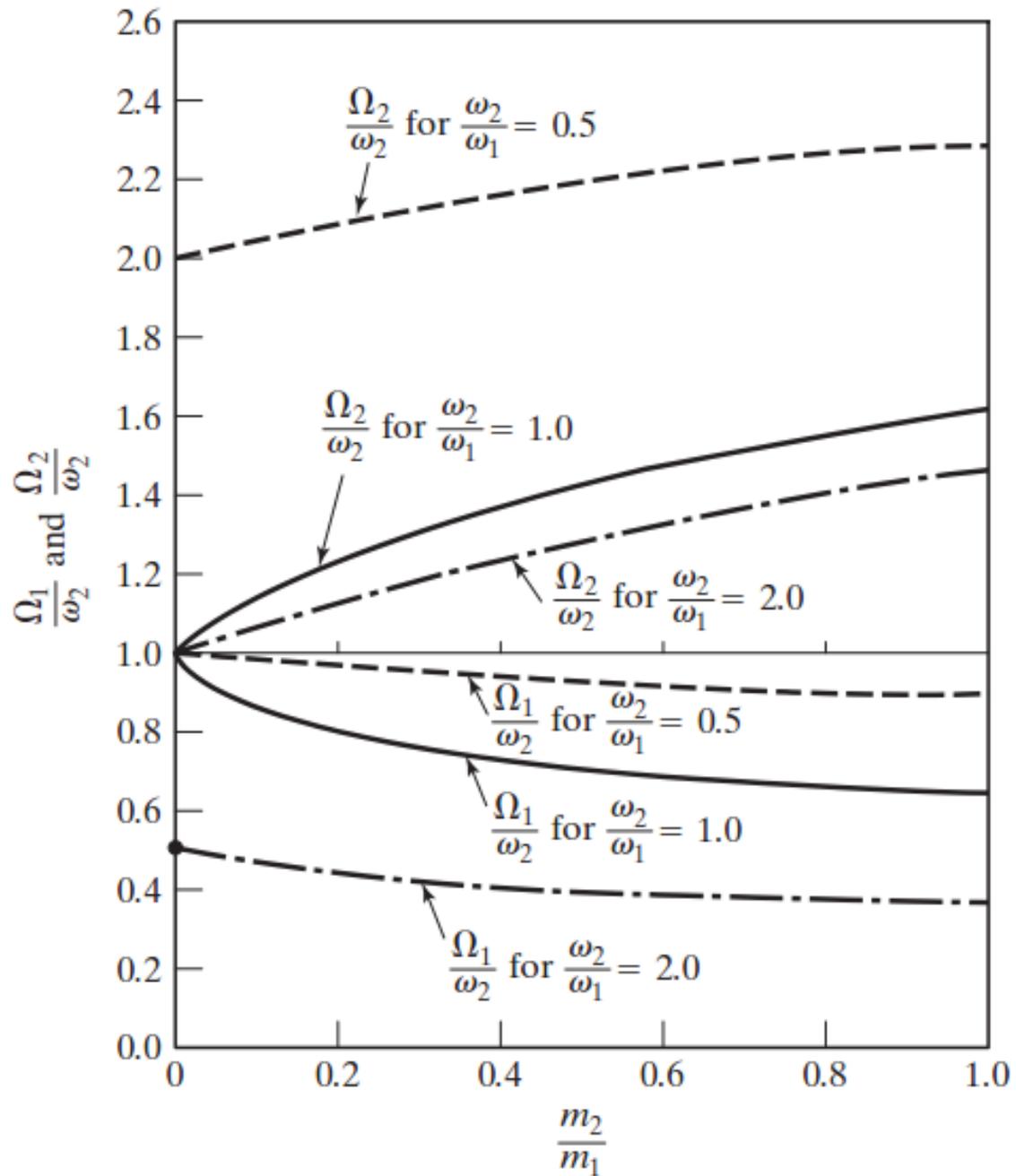
$$\left. \begin{matrix} \left(\frac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2 \\ \left(\frac{\Omega_2}{\omega_2}\right)^2 \end{matrix} \right\} = \frac{\left\{ \left[ 1 + \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right] \right.}{2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2} \mp \left. \left\{ \left[ 1 + \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right]^2 - 4 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right\}^{1/2} \right\}}$$

1、从方程式可以看出，工作频率（即 $\omega_1$ ）小于 $\Omega_2$ 且大于 $\Omega_1$ 。机器必须在启动和停止期间通过。这会导致大振幅。

2、由于动态吸收器被调谐到一个激励频率稳态仅在该频率下机器的振幅为零。如果机器在其他地方运行频率或如果作用在机器上的力有几个频率，那么机器的振动幅度可能变大。

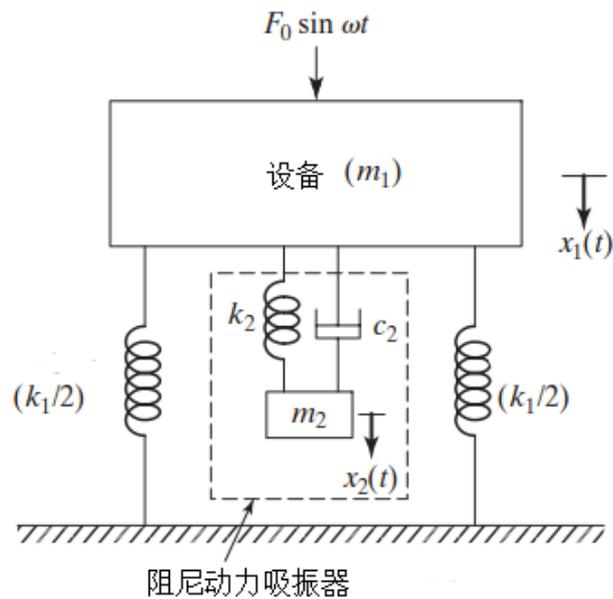


3





## 阻尼动力吸振器



$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0$$

$$X_1 = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2 + ic_2\omega)}{[(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - m_2k_2\omega^2] + i\omega c_2(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2)}$$

$$X_2 = \frac{X_1(k_2 + i\omega c_2)}{(k_2 - m_2\omega^2 + i\omega c_2)}$$



# 阻尼动力吸振器

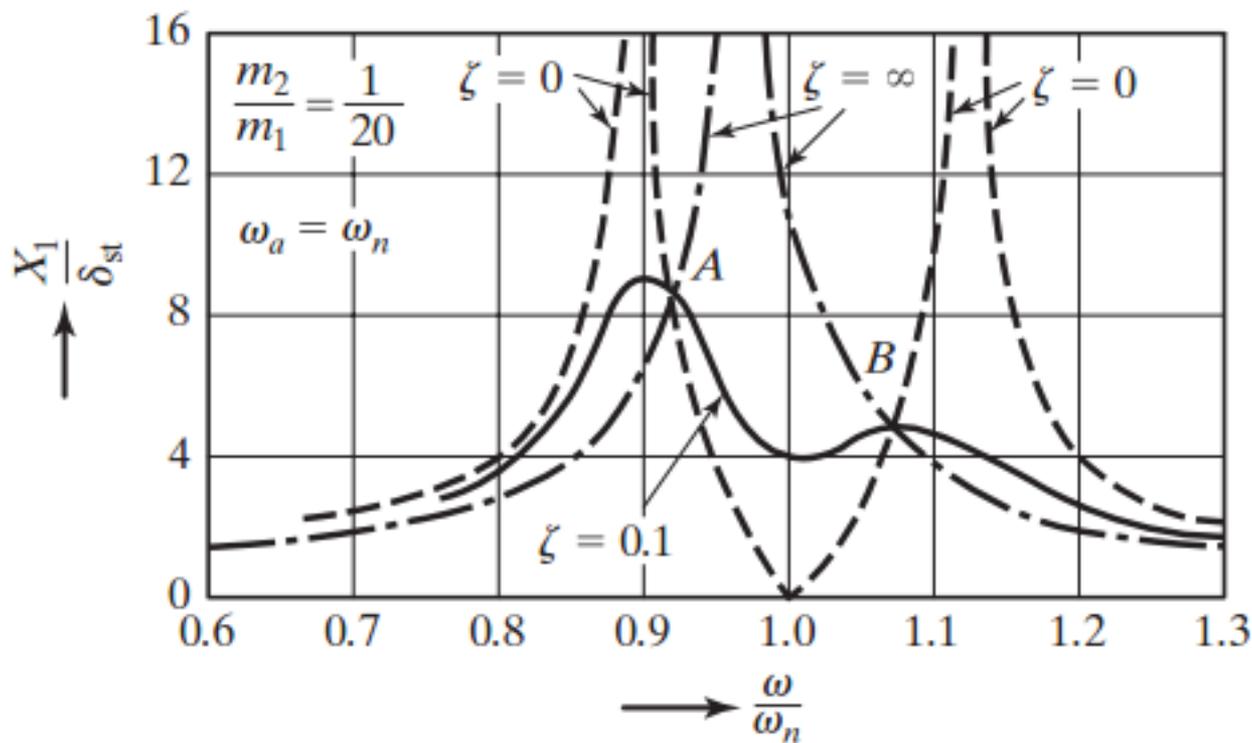
$$\mu = m_2/m_1$$

$$\delta_{st} = F_0/k_1$$

$$\omega_a^2 = k_2/m_2$$

$$\omega_n^2 = k_1/m_1$$

$$f = \omega_a/\omega_n$$



从图中看，尽管取不同的阻尼比时不同，但这些曲线都通过“A”和“B”两点，若能使A和B点处值相等或接近，并且在整个频率范围内的值不超过A和B点的值，则主系统(原单自由度系统)的响应得到抑制。



对参数已知( $m_1, k_1$ )的无阻尼单自由度系统, 按下列步骤设计阻尼动力吸振器:

1) 对已知的条件, 根据工程上的需要选取一个可实现的值,  $\mu = m_2 / m_1$

2) 由  $\mu$  按下式求  $v_{opt}$

$$v_{opt} = 1 / (1 + \mu)$$

$$v = \sqrt{\frac{k_2 m_1}{m_2 k_1}} \longrightarrow k_2$$

3) 计算阻尼比  $\zeta_2$ :

$$\zeta_{2opt} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - v^2}$$

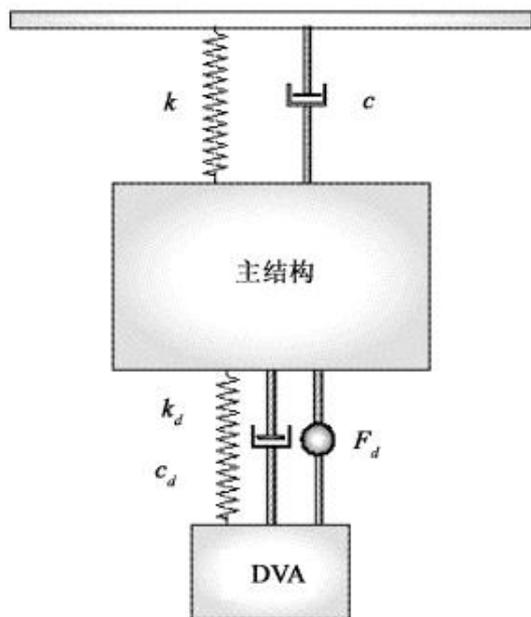
4) 用式( 5 - 47 )计算  $\mathcal{U}_1$ ,

估算原系统的响应:

$$(\mathcal{U}_1)_{A,B} = \sqrt{(2 + \mu) / \mu} \longrightarrow \mu \uparrow (\mathcal{U}_1)_{A,B} \downarrow$$

### 3) 主动动力吸振器及其对桁架结构的振动抑制

#### ① 系统描述



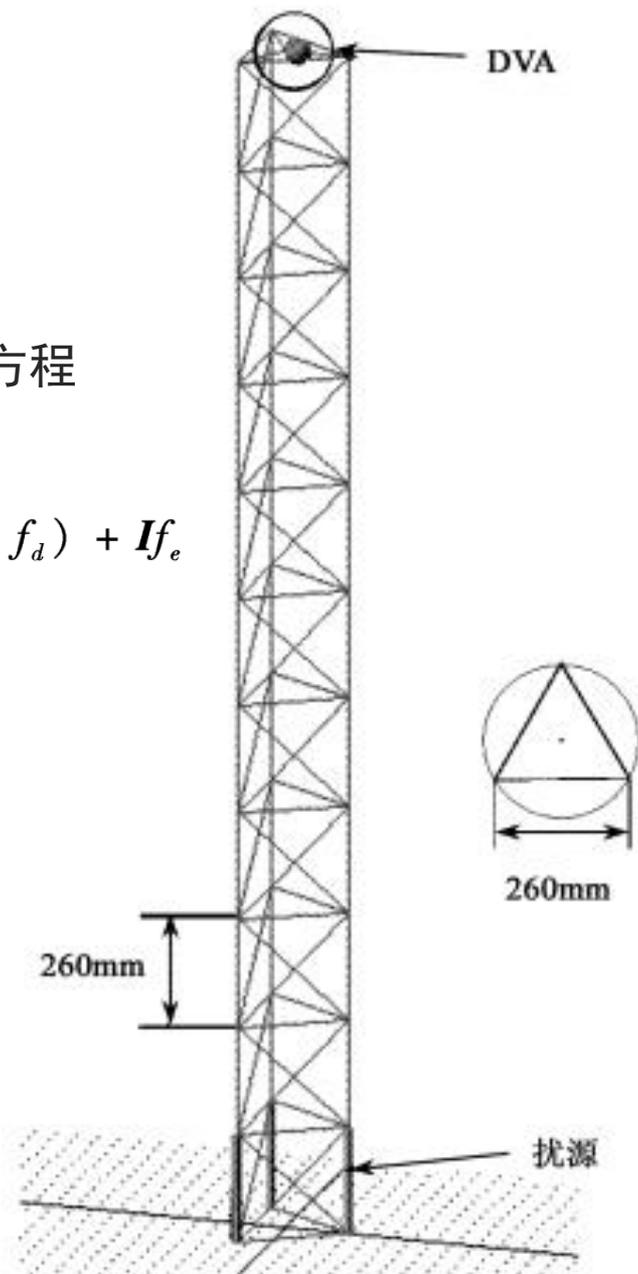
主动动力吸振器 (Dynamic Vibration Absorber, DVA) 结构

主动DVA动力学方程

$$m_d(\ddot{x}_d + \ddot{x}_p) + c_d\dot{x}_d + k_d x_d = f_d$$

桁架结构动力学方程

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = E(c_d\dot{x}_d + k_d x_d - f_d) + If_e$$





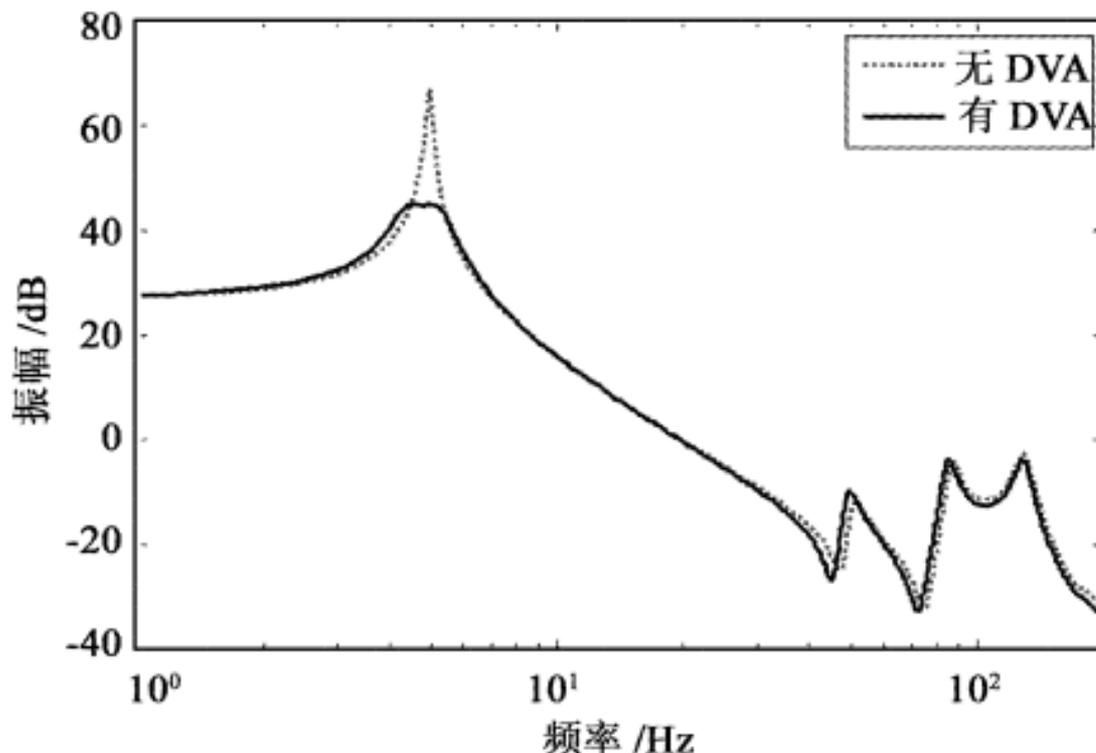
## ② 系统特性仿真

通过有限元软件Patran/Nastran以及MATLAB对吸振器和桁架系统进行动力学仿真，确定系统特性

仿真模型：

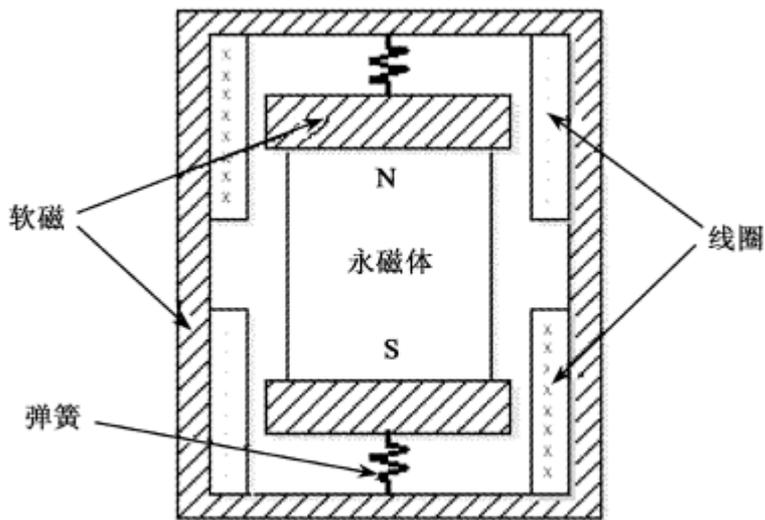
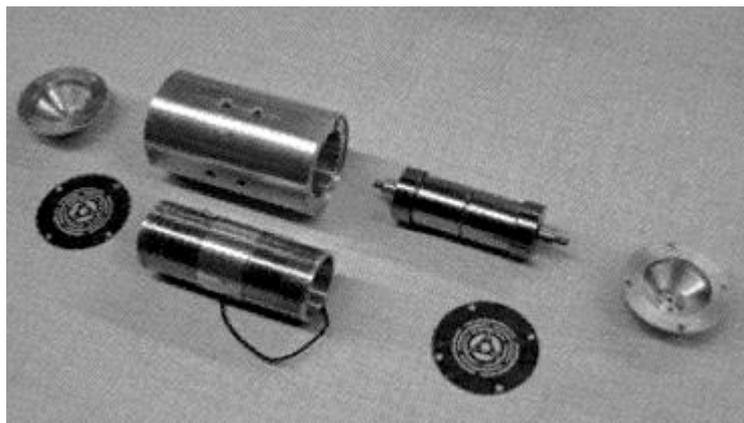
参考实物桁架，高2.86m，11层，铝合金材料，横杆和竖杆长度260mm，杆截面直径4m，调整材料刚度使桁架一阶模态与实物相同为，4.9Hz。

DVA质量0.5kg，刚度478N/m，阻尼系数5Ns/m。

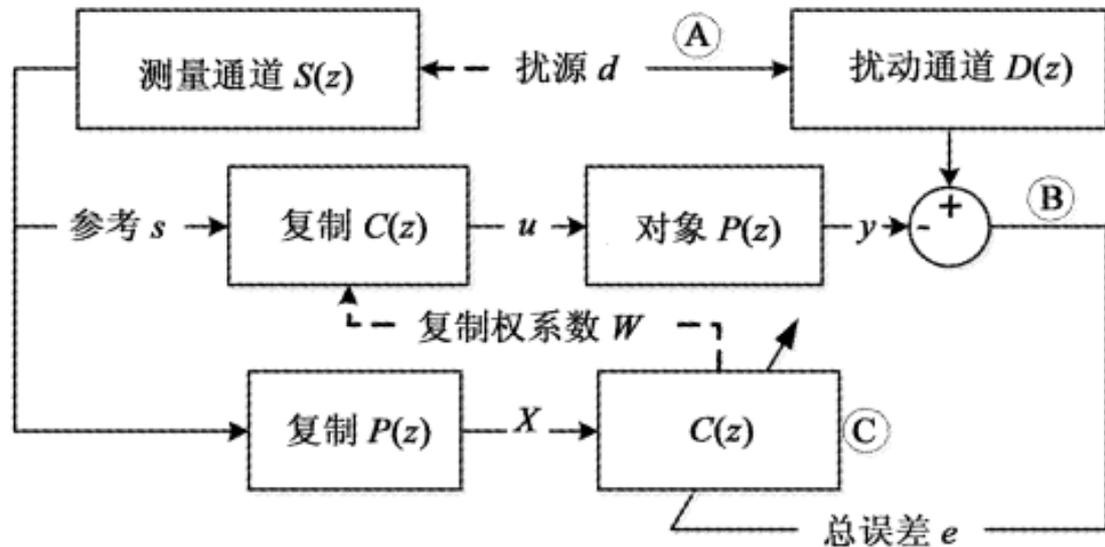


有无DVA时幅频曲线对比

③ 主动DVA及其振动主动控制算法



主动DVA机械构成及构结构示意图



自适应逆控制原理图

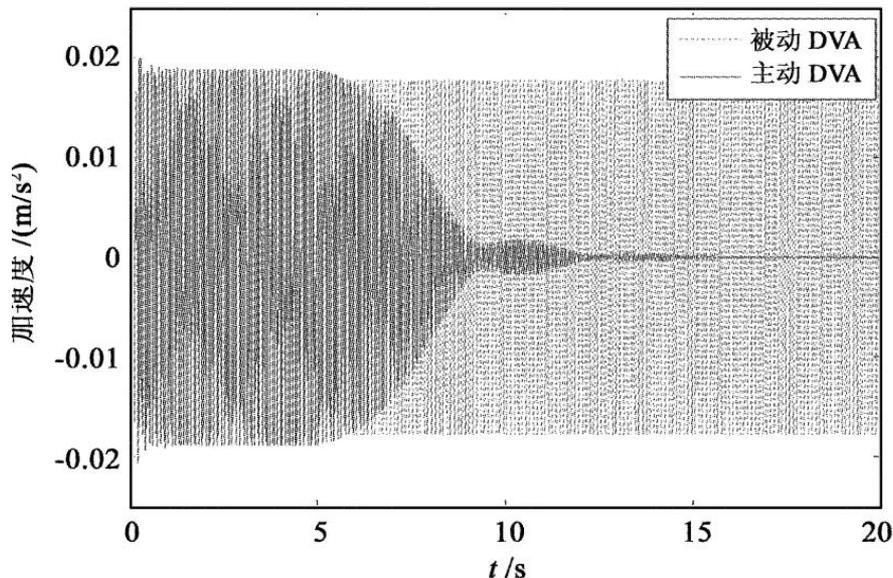
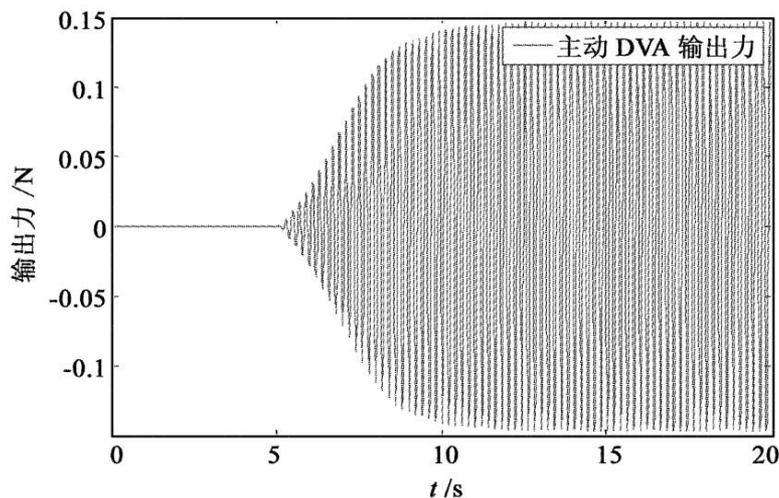
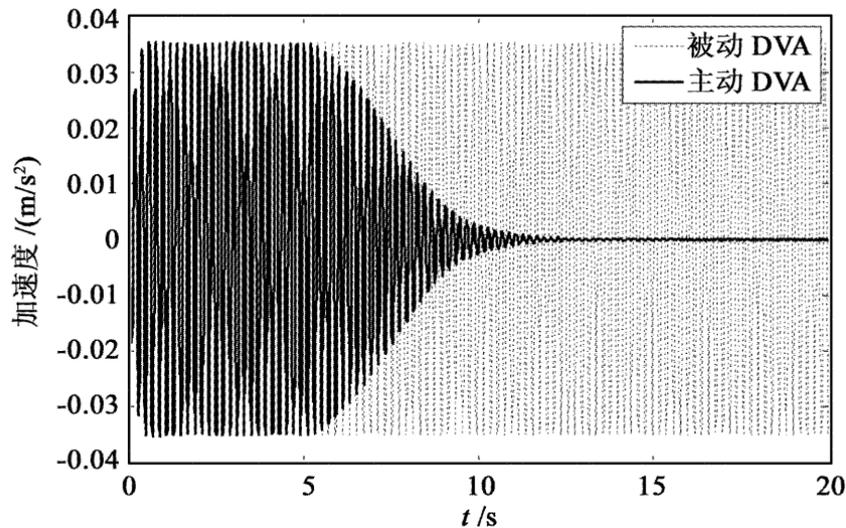
自适应迭代收敛后的结果为 $e$ 最小，即：

$$D(z) \approx S(z)C(z)P(z)$$

实现振动的主动抑制



### ③ 主动DVA及其振动主动控制算法



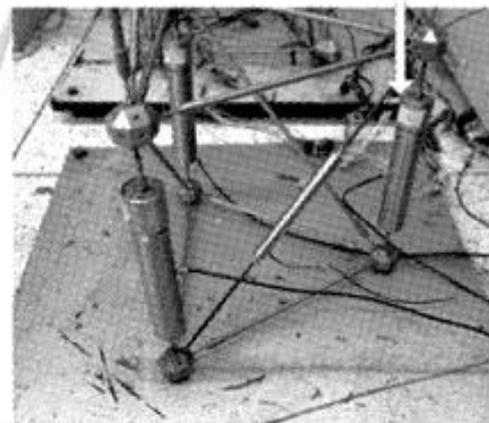
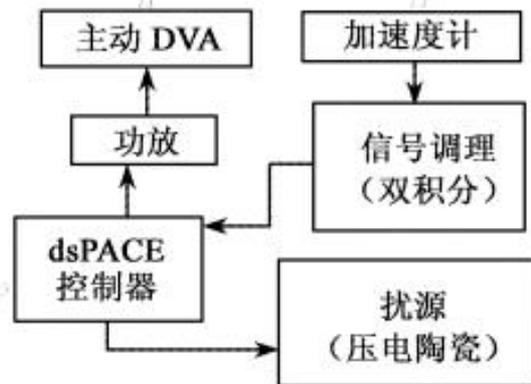
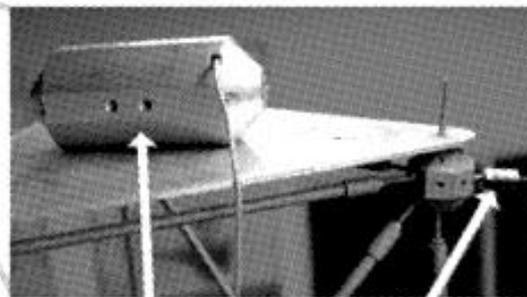
8Hz（非共振）扰动频率下主动DVA抑振仿真结果

4.9Hz扰动频率下主动DVA抑振仿真结果



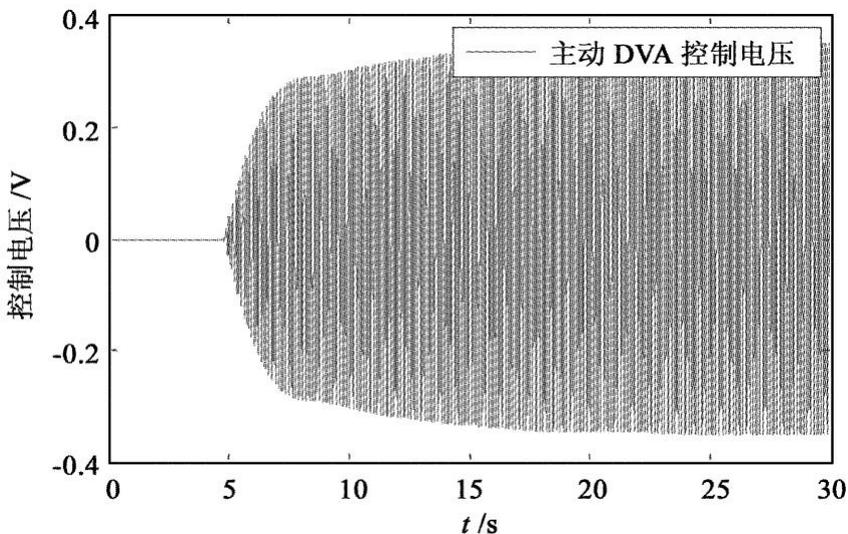
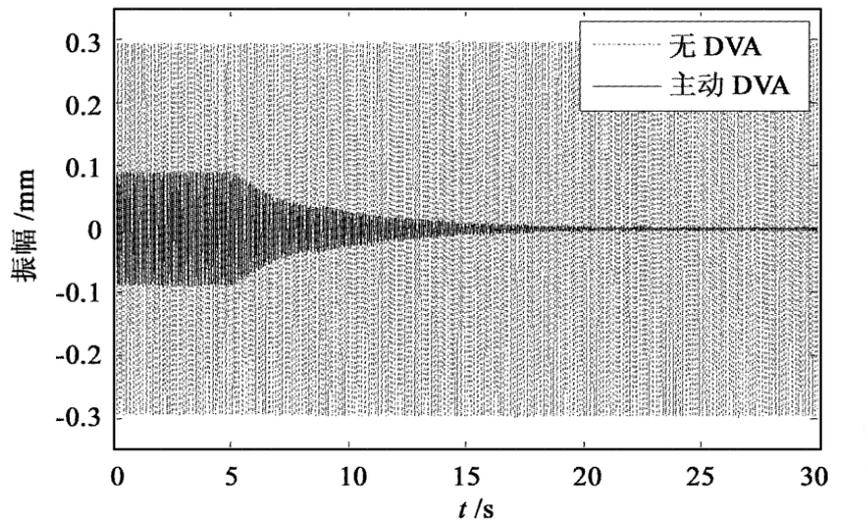
### ④ 主动DVA-桁架结构振动控制实验

dSPACE控制器基于MATLAB/Simulink的RTW工具自动生成基于模块编写的控制程序。

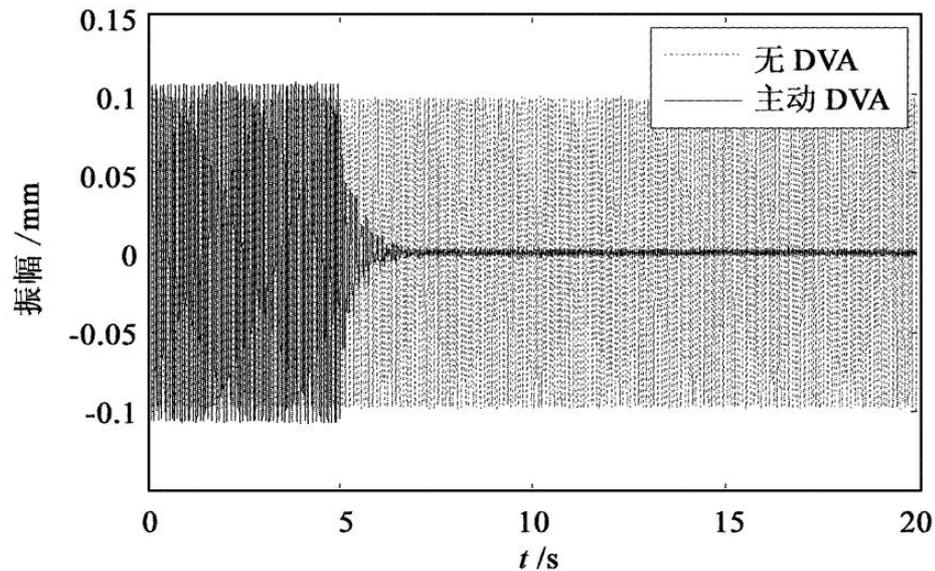




### ④ 主动DVA-桁架结构振动控制实验

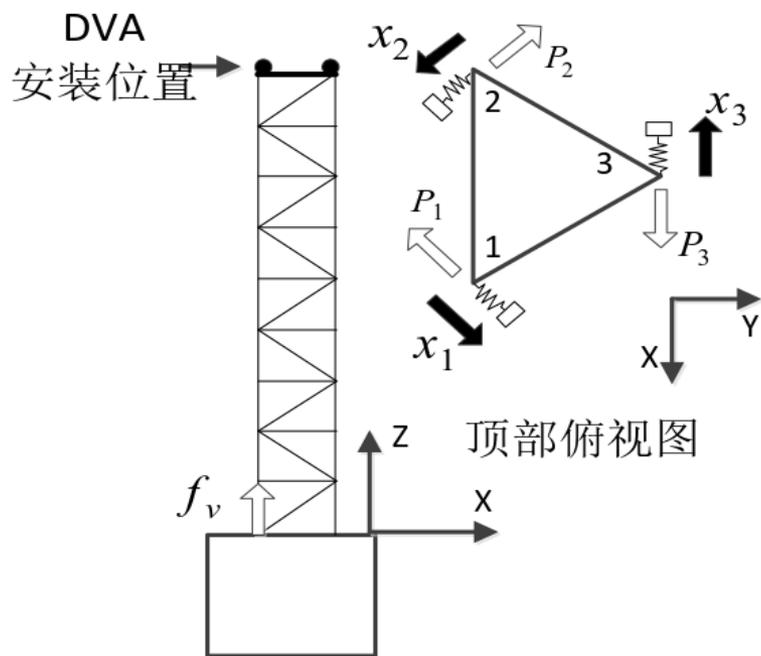


4.9Hz扰动频率下主动DVA抑振实验结果

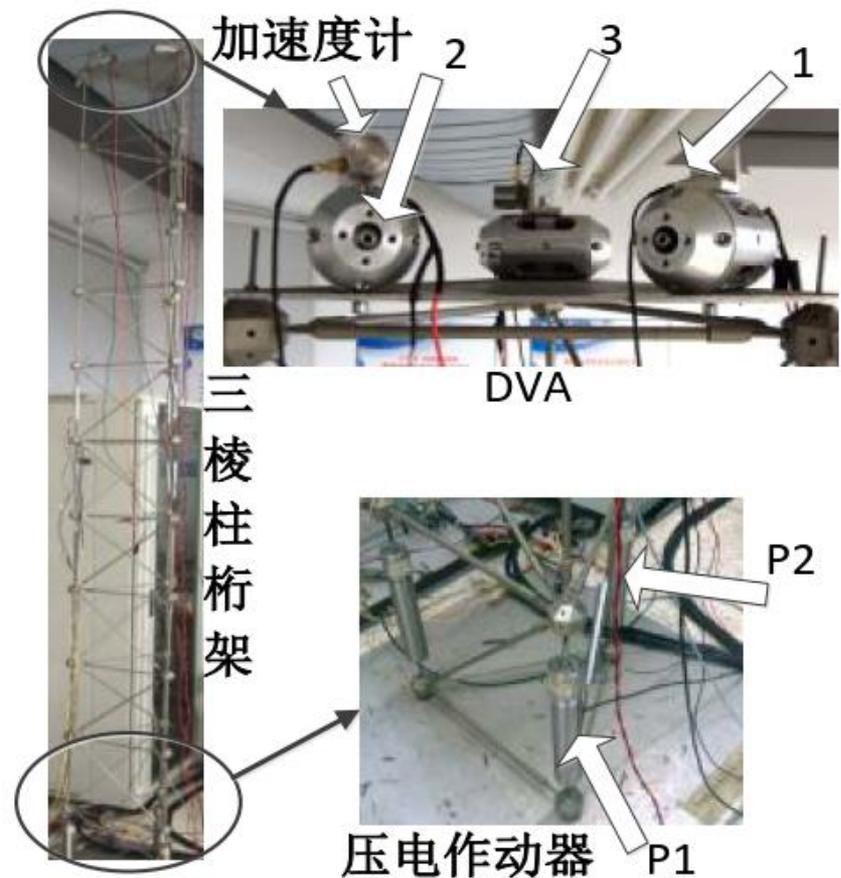


非共振扰动频率下主动DVA抑振实验结果

⑤主动DVA多自由度振动抑制



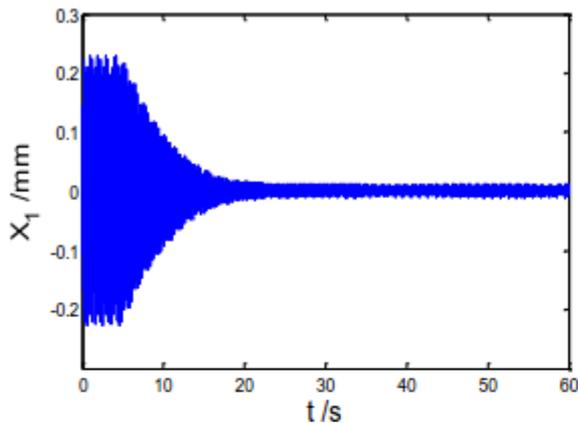
DVA-桁架三自由度振动控制模型



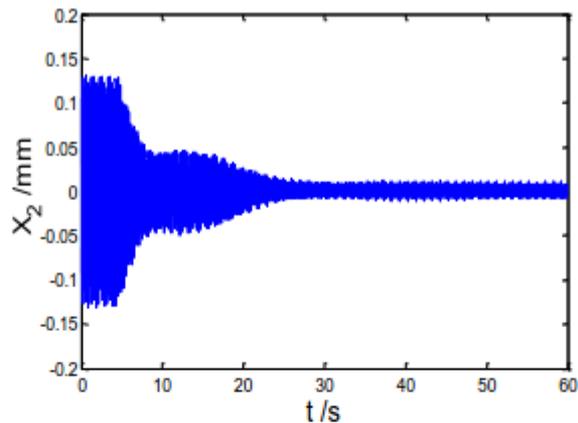
实验控制系统



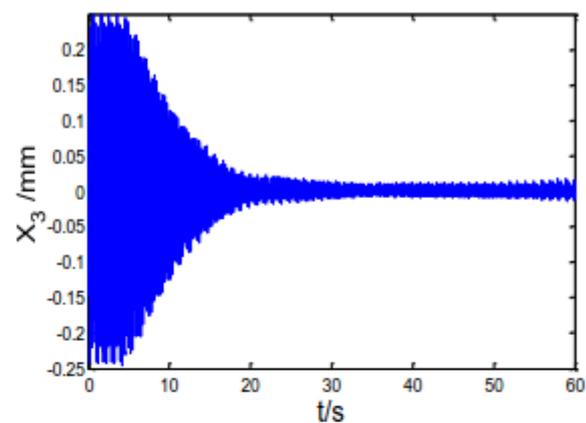
⑤主动DVA多自由度振动抑制



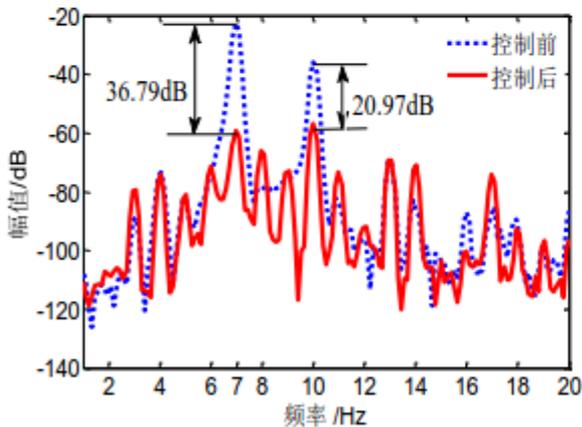
a.  $x_1$  的振动抑制时域结果



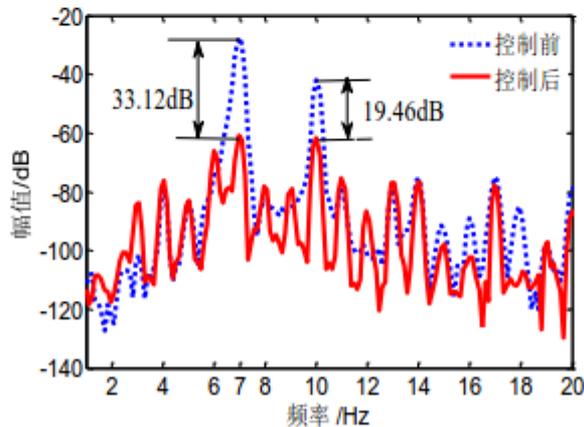
b.  $x_2$  的振动抑制时域结果



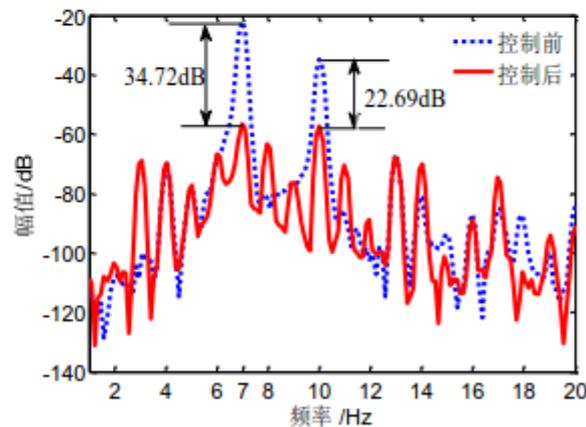
c.  $x_3$  的振动抑制时域结果



d.  $x_1$  的振动抑制频域结果



e.  $x_2$  的振动抑制频域结果



f.  $x_3$  的振动抑制频域结果

7Hz、10Hz干扰下的振动抑制实验结果